Modelarea Sistemelor Matematice Simplificate

Extras

2. Modele matematice

O preconditie care permite oricarei simulari pe calculator a unui sistem fizic existent sa fie îndeplinita este crearea modelului sau matematic. Un astfel de model este deseori obtinut ca rezultat al identificarii sistemului sau mai putin frecvent pe baza analizei structurale, daca este posibil. În orice caz, nu toate modelele sunt obtinute în acest fel. De aceea merita notat ca dintr-un set larg de modele matematice a variate sisteme fizice un mic subset se poate separa. Acest subset este caracterizat prin faptul ca pentru modelele sale exista valori ale parametrilor testate legal si oficial definite deseori prin datele sale excelente. Aceste metode sunt de obicei relativ simple si forma lor pot fi usor determinate. Aceasta forma rezulta dintr-o functie obiectiva care este o formula matematica abstracta, care trebuie întâlnita de sistem pentru a fi modelata. De aceea astfel de modele sunt numite modele standard. Constituind o referinta modelele standard joaca un rol important în determinarea erorilor, în special în sistemele de control automatic, metrologia dinamica, etc.

Sistemele existente fizic sunt neliniare, dar în majoritatea cazurilor neliniaritatea lor este suficient de mica astfel încât erorile cauzate sa poata fi ignorate. În concordanta, le putem descrie în domeniul timp prin ecuatii diferentiale liniare sau prin ecuatii de stare si în domeniul transformatei Laplace prin functii de transfer. Pe baza acestora, aceste metode de descriere vor fi tratate împreuna cu metodele de rezolvare a ecuatiilor corespunzatoare si gasirea relatiilor mutuale dintre ele. La sfârsitul capitolului vom discuta despre modelele standard selectate si proprietatile lor.

2.1. Ecuatii diferentiale

Un model dinamic liniar si invariant cu o singura intrare descris printr-o ecuatie diferentiala de ordinul n, neomogena, pentru conditii initiale nule, are urmatoarea forma:

. . . .
. . . .
. . . .

Imagini din documentul complet:

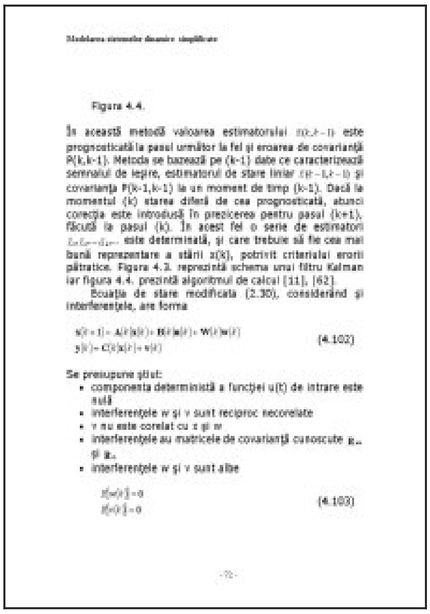

Modelarea sistemelor dinamice simplificate

Figura 4.4.

În această metodă valoarea estimatorului $\hat{x}(k,k-1)$ este prognosticată la pasul următor la fel și eroarea de covarianță P(k,k-1). Metoda se bazează pe (k-1) date ce caracterizează semnalul de ieșire, estimatorul de stare liniar $\hat{x}(k-1,k-1)$ și covarianța P(k-1,k-1) la un moment de timp (k-1). Dacă la momentul (k) starea diferă de cea prognosticată, atunci corecția este introdusă în prezicerea pentru pasul (k+1), făcută la pasul (k). În acest fel o serie de estimatori $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-1}$ este determinată, și care trebuie să fie cea mai bună reprezentare a stării x(k), potrivit criteriului erorii pătratice. Figura 4.3. reprezintă schema unui filtru Kalman iar figura 4.4. prezintă algoritmul de calcul [11], [62].

Ecuația de stare modificată (2.30), considerând și interferențele, are forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{W}(k)\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{aligned} \qquad (4.102)$$

Se presupune știut:
- componenta deterministă a funcției u(t) de intrare este nulă
- interferențele w și v sunt reciproc necorelate
- v nu este corelat cu x și w
- interferențele au matricele de covarianță cunoscute $\mathbf{R}_{ww}$ și $\mathbf{R}_{vv}$
- interferențele w și v sunt albe

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(k)] &= 0 \\ E[\mathbf{v}(k)] &= 0 \end{aligned} \qquad (4.103)$$

- 72 -


Modelarea sistemelor dinamice simplificate

Estimările valorilor căutate pot fi determinate pe baza relațiilor ce descriu filtrul Kalman. Acestea sunt:

Prezicerea starii:

$$\hat{\mathbf{x}}(k,k-1) = \mathbf{A}(k-1)\hat{\mathbf{x}}(k-1,k-1) + \mathbf{B}(k-1)\mathbf{u}(k-1) \qquad (4.104)$$

Prezicerea covarianței

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k,k-1) = {} & \mathbf{A}(k-1)\mathbf{P}(k-1,k-1)\mathbf{A}^T(k-1) + \\ & + \mathbf{W}(k-1)\mathbf{R}_{ww}(k-1)\mathbf{W}^T(k-1) \end{aligned} \qquad (4.105)$$

Prezicerea ieșirii sistemului

$$\hat{\mathbf{y}}(k,k-1) = \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k,k-1) \qquad (4.106)$$

Prezicerea erorii ieșirii sistemului

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k,k-1) = \mathbf{y}(k) - \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k,k-1) \qquad (4.107)$$

Covarianța de inovație

$$\mathbf{R}_{ee}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k,k-1)\mathbf{C}^T(k) + \mathbf{R}_{vv}(k) \qquad (4.108)$$

Coeficienții matricei de amplificare

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k,k-1)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{R}_{ee}^{-1}(k) \qquad (4.109)$$

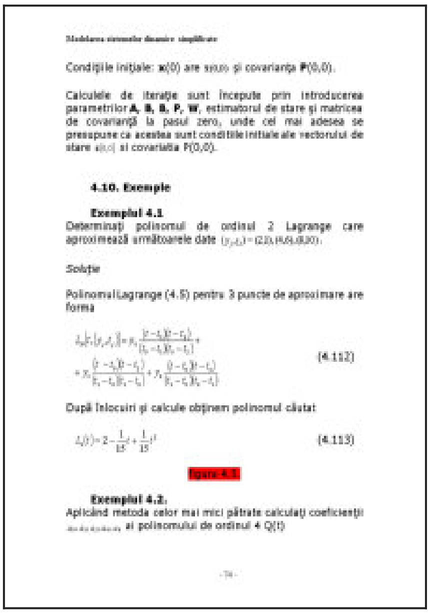
Corecția starii

$$\hat{\mathbf{x}}(k,k) = \hat{\mathbf{x}}(k,k-1) + \mathbf{K}(k)\mathbf{e}(k) \qquad (4.110)$$

Corecția covarianței

$$\mathbf{P}(k,k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)]\mathbf{P}(k,k-1) \qquad (4.111)$$

- 73 -


Modelarea sistemelor dinamice simplificate

Condițiile inițiale: **x**(0) are $\hat{x}(0,0)$ și covarianța **P**(0,0).

Calculele de iterație sunt începute prin introducerea parametrilor **A**, **B**, **B**, **P**, **W**, estimatorul de stare și matricea de covarianță la pasul zero, unde cel mai adesea se presupune ca acestea sunt condițiile inițiale ale vectorului de stare $\hat{x}(0,0)$ și covariația P(0,0).

4.10. Exemple

Exemplul 4.1
Determinați polinomul de ordinul 2 Lagrange care aproximează următoarele date $(y_i, t_i) = (2,1), (4,6), (8,20)$.

Soluție

Polinomul Lagrange (4.5) pentru 3 puncte de aproximare are forma

$$\begin{aligned} L_2[t, (y_i, t_i)] = {} & y_1 \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + \\ & + y_2 \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} + y_3 \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)} \end{aligned} \qquad (4.112)$$

După înlocuiri și calcule obținem polinomul căutat

$$L_2(t) = 2 - \frac{1}{15}t + \frac{1}{15}t^2 \qquad (4.113)$$

figura 4.5.

Exemplul 4.2.
Aplicând metoda celor mai mici pătrate calculați coeficienții a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ai polinomului de ordinul 4 Q(t)

- 74 -

Mai multe detalii se gasesc in [pagina documentului](#) din [Biblioteca.RegieLive.ro](#)